

COMPORTAMIENTO DEL PRECIO DEL RIESGO DE MERCADO EN MODELOS DE ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TANTOS DE INTERÉS

Lourdes Gómez del Valle & Julia Martínez Rodríguez

Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

Resumen

En la literatura de los últimos años han surgido numerosos modelos que tratan de analizar la estructura temporal de los tantos de interés. Generalmente en estos modelos no se considera una dependencia del tiempo en el precio del riesgo de mercado, sin embargo existe cierta evidencia empírica de que este precio no es constante.

Nosotros consideramos que este parámetro depende del tiempo y también del tanto de interés. Estimamos los parámetros del problema con datos observados en el mercado español de renta fija y comparamos los diferentes resultados obtenidos, analizando hasta qué punto esta modificación supone una mejora en distintos modelos considerados.

Palabras Clave: Obligación cupón-cero, precio del riesgo de mercado, ecuaciones en derivadas parciales

1. Introducción

La estructura temporal de los tantos de interés ha recibido una atención constante en los últimos años por parte de la literatura económica.

Ya en 1970, Merton [12] modelizó el tanto de interés como un proceso estocástico que utilizó para la valoración de opciones. Posteriormente, se empezaron a utilizar argumentos de arbitraje similares a los de Black y Scholes en 1973 [1] para modelizar la estructura temporal de los tantos de interés, como se puede observar en los trabajos de Vasicek en 1977 [16] o de Brennan y Schwartz en 1979 [2]. Esta idea ha permitido construir recientemente nuevos modelos más perfeccionados, como el de Schaefer y Schwartz en 1984 [15], el de Cox, Ingersoll y Ross en 1985 [6], el de Hull y White en 1990 [10] y el de Chen en 1996 [5].

Generalmente en estos modelos no se considera una dependencia del tiempo en el precio del riesgo de mercado. Sin embargo, existe cierta evidencia empírica de que este precio no es constante sino que puede depender del tiempo y del tanto de interés tal como se observa en el trabajo de Brennan y Schwartz [3].

Nosotros introducimos, en varios de los modelos anteriormente citados, la dependencia del precio de riesgo del mercado, del tiempo y del tanto de interés. En algunos casos que aparecen, es posible proporcionar una expresión analítica de la solución de la ecuación en derivadas parciales que determina los precios de las obligaciones. Sin embargo, en otras muchas ocasiones, es necesario recurrir a métodos numéricos para encontrar dichos precios.

En todos los modelos considerados aparecen parámetros de los que no se conoce su valor. En nuestro trabajo estimamos dichos valores, mediante el método generalizado de momentos (GMM) y el de mínimos cuadrados no lineal, a partir de datos observados en el mercado español de renta fija.

Comparamos los resultados obtenidos con estas nuevas modificaciones de los modelos, a la hora de predecir los precios, y analizamos hasta qué punto esta introducción del tiempo y del tanto de interés supone una mejora. Para ello, presentamos gráficas que ilustran este estudio desde diferentes puntos de vista.

2. Descripción de los modelos y sus soluciones.

Consideramos un mercado en el que existen obligaciones libres de riesgo de insolvencia, emitidas por el Estado y que puede comprar cualquier inversor.

Denotamos por $P(t, T)$ el precio, en el instante de tiempo t , de una obligación (cupón cero) que vence en el instante T , de modo que $t \leq T$. Consideramos que el valor de la obligación a su vencimiento es una unidad monetaria, es decir,

$$P(T, T) = 1.$$

Por otro lado $R(t, T)$ representa el tanto interno de rendimiento, en el instante de tiempo t , de una obligación con vencimiento en T ,

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T), \quad 0 < t < T.$$

Definimos el tanto de interés instantáneo $r(t)$ como

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T).$$

Describimos los modelos bajo las siguientes hipótesis:

1. El tanto de interés $r(t)$ sigue un proceso de difusión de la forma

$$dr = f(r) dt + \mathbf{r}(r) dz, \quad (1)$$

donde $f(r) = \mathbf{b} (m - r)$, con \mathbf{b} y m constantes que representan la velocidad de ajuste y el valor al que el proceso tiende a largo plazo, \mathbf{r} es una función del tanto de interés conocida como volatilidad y z un proceso de Wiener.

2. El precio de una obligación, $P(t, T)$, no solo depende del tiempo t , y del tiempo final T , sino también del tanto de interés $r(t)$. Así consideramos

$$P(t, T) = P(t, T, r).$$

3. El mercado es eficiente, es decir, no existen costes de transacción, todos los inversores tienen la misma información y su comportamiento es racional.

Utilizando el lema de Itô obtenemos la ecuación diferencial estocástica del precio de una obligación con vencimiento en T ,

$$dP(t, T, r) = P(t, T, r) \mathbf{m}(t, T, r) dt + P(t, T, r) \mathbf{s}(t, T, r) dz,$$

donde

$$\mathbf{m}(t, T, r) = \frac{\partial P}{\partial r} f + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2},$$

$$\mathbf{s}(t, T, r) = \mathbf{r} \frac{\partial P}{\partial r},$$

siendo \mathbf{m} la rentabilidad esperada de la obligación y \mathbf{s} la variación no esperada en las rentabilidades de las obligaciones.

Mediante un razonamiento de no arbitraje obtenemos la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (f + \mathbf{r} \mathbf{l}) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

donde $\mathbf{l}(t, r)$ es el precio del riesgo del mercado

$$\mathbf{l}(t, r) = \frac{\mathbf{m}(t, T, r) - r}{\mathbf{s}(t, T, r)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

que es independiente del periodo de vencimiento $\mathbf{t} = T - t$.

La ecuación (2) queda complementada con la condición final $P(T, T, r) = 1$, que asegura que el precio de una obligación cupón-cero en el instante de tiempo de su vencimiento es una unidad monetaria.

En el modelo de Vasicek [16], la volatilidad y el precio del riesgo de mercado son constantes,

$$\mathbf{r}(r) = \mathbf{r}_0,$$

$$\mathbf{I}(t, r) = \mathbf{I}_1,$$

y la solución de la ecuación (2) es conocida.

Cuando el modelo considerado es el de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) [6] la volatilidad y el precio del riesgo de mercado son de la forma

$$\mathbf{r}(r) = \mathbf{r}_0 \sqrt{r},$$

$$\mathbf{I}(t, r) = \mathbf{I}_1 \sqrt{r},$$

y de nuevo la solución de (2) es conocida.

Nosotros introducimos variaciones en estos modelos que consisten en considerar una dependencia del tiempo y del tanto de interés en el precio del riesgo del mercado. Así pues, presentamos los siguientes modelos

1 Vasicek modificado. (VasMod). $\mathbf{I}(t, r) = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 t + \mathbf{I}_3 r$, con $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}$.

2 CIR modificado. (CIRMod). $\mathbf{I}(t, r) = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 t) \sqrt{r}$, con $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 \in \mathbb{R}$.

Estas elecciones, además de suponer una mayor riqueza en cuanto a la dinámica del riesgo de mercado, tienen la característica de que las soluciones de la ecuación (2) pueden expresarse en términos del proceso estocástico subyacente Friedman [7]. Así pues, ensayamos con una solución de la forma

$$P(t, T, r) = \exp(A(t) - B(t)r), \quad (3)$$

donde A y B son solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinario siguiente dependiendo del tipo de modelo:

1 Vasicek modificado

$$A'(t) = [\mathbf{b}m - \mathbf{r}_0(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 t)]B(t) - \frac{1}{2} \mathbf{r}_0^2 B^2(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$B'(t) = (\mathbf{b} + \mathbf{r}_0 \mathbf{I}_3)B(t) - 1, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

2. CIR modificado

$$A'(t) = \mathbf{b}mB(t), \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

$$B'(t) = [\mathbf{b} + \mathbf{r}_0(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 t)]B(t) + \frac{1}{2} \mathbf{r}_0^2 B^2(t) - 1, \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

ambos con condiciones finales $A(T) = 0, B(T) = 0$.

Para el sistema (4)-(5) encontramos la solución

$$A(t) = - \int_t^T \left((bm - r_0(I_1 + I_2 s))B(s) - \frac{1}{2} r_0^2 B^2(s) \right) ds,$$

$$B(t) = \frac{1}{b + r_0 I_2} (1 - \exp(-(b - r_0 I_1)(T - t))),$$

Sin embargo, en el caso del sistema (6)-(7) consideramos, al no encontrar una expresión para la solución, una aproximación a ella utilizando desarrollos de Taylor de las funciones $A(t)$ y $B(t)$ en el punto $t = T$, obteniendo así las expresiones

$$A(t) = -\frac{bm}{2} (t - T)^2, \quad 0 < t < T,$$

$$B(t) = -(t - T) - \frac{b + (I_1 + I_2 T)r_0}{2} (t - T)^2, \quad 0 < t < T.$$

3. Estimación de los parámetros

En esta sección describimos las características fundamentales para la estimación de los parámetros que surgen en los diferentes modelos anteriormente planteados.

Utilizamos el tanto de interés a un mes como la variable proxy del tanto de interés sin riesgo a corto plazo.

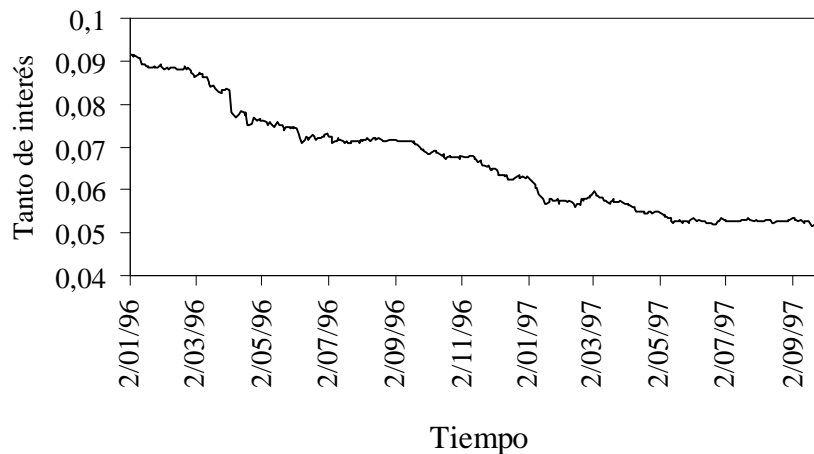


Figura 1: Evolución del tanto de interés mensual desde el 2 de enero de 1996 hasta el 30 de setiembre de 1997.

Los datos observados que utilizamos son diarios, y están expresados en valores anualizados (compuestos continuamente) y comprenden desde el 2 de enero de 1996 hasta el 30 de abril de 1998. Las estimaciones de los parámetros se realizaron únicamente con los datos hasta el 30 de setiembre de 1997. El resto se reservó para analizar los resultados obtenidos durante el periodo de predicción. Estos datos nos fueron proporcionados por el Servicio de Estudios del Banco de España [13].

Las gráficas de los tantos de interés y de sus diferencias primeras se incluyen en las Figuras 1 y 2. Puede observarse la tendencia decreciente que los tantos de interés han experimentado.

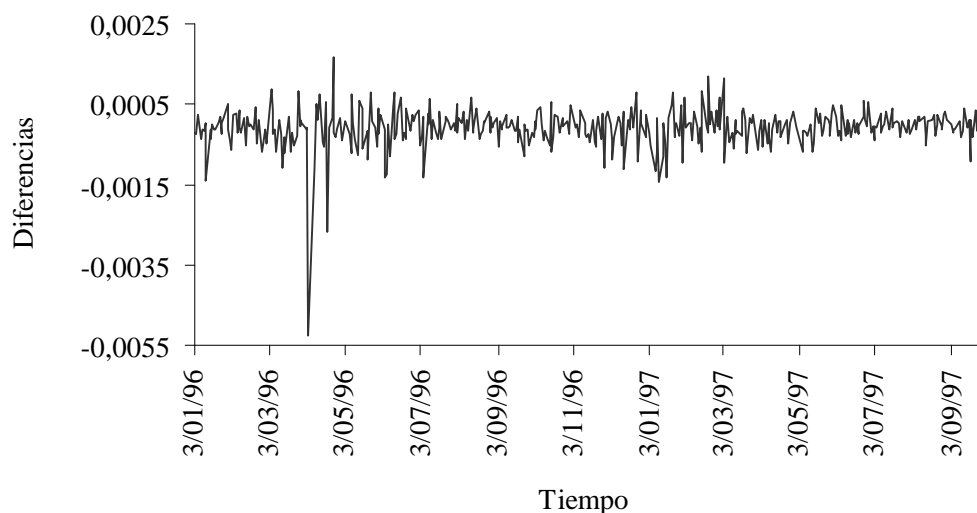


Figura 2: Evolución de las primeras diferencias del tanto de interés mensual desde el 2 de enero de 1996 hasta el 30 de setiembre de 1997.

La Tabla 1 recoge los estadísticos descriptivos de las series del tanto de interés y de sus diferencias. Observamos que los coeficientes de autocorrelación de los tantos de interés son elevados y disminuyen lentamente, sin embargo los correspondientes a las variaciones diarias son pequeñas y no mantienen su signo. Por tanto, este resultado ofrece cierta evidencia sobre la estacionariedad de los tantos de interés.

Los parámetros de los procesos estocásticos de los tantos de interés los estimamos por el Método Generalizado de los Momentos (Hansen [9], Chan [4]). Esta técnica tiene varias ventajas: por un lado no es necesario que las diferencias de los tantos de interés sigan una distribución normal, sólo se requiere que la serie formada por dichas diferencias sea estacionaria y ergódica; por otra parte tanto los parámetros estimados

como los errores estándar son consistentes, incluso cuando las perturbaciones son heterocedásticas. Para utilizar este método, consideramos una discretización de la ecuación diferencial estocástica de cada modelo.

Variable	Tanto de interés	Diferencias
N	436	435
Media	0,066338	-9,18 E ⁻⁵
Desviación típica	0,011908	0,000486
Máximo	0.091514	0,001659
Mínimo	0,051459	-0,005274
r_1	0,992	-0,018
r_2	0,985	-0,003
r_3	0,977	-0,057
r_4	0,969	-0,004
r_5	0,962	-0,021
r_6	0,954	-0,046
r_7	0,947	-0,002
r_8	0,939	-0,02
r_9	0,932	0,162

Tabla 1: Estadísticos descriptivos del tanto de interés a corto plazo y de sus diferencias.

Siguiendo a Brennan y Schwartz [3] y Chan [4] la especificación econométrica en tiempo discreto de la ecuación diferencial estocástica considerada (1) es la siguiente

$$r_{t+1} - r_t = \mathbf{b}(m - r_t) + \mathbf{e}_{t+1},$$

$$E[\mathbf{e}_{t+1}] = 0,$$

$$E[\mathbf{e}_{t+1}^2] = \mathbf{r}(r)^2.$$

Esta discretización permite que la varianza de las diferencias de los tantos de interés dependa directamente del nivel de los tantos de interés de forma consistente con el modelo en tiempo continuo. La convergencia débil de este esquema es de primer orden, esto supone que la diferencia entre la solución del modelo y la obtenida en la

discretización tiende a cero cuando el tamaño de los periodos de tiempo considerados decrecen hacia cero [11]. Los parámetros estimados para los procesos estocásticos se recogen en la Tabla 2. Los valores entre paréntesis son los estadísticos t y los valores entre corchetes los p -valores. Como puede observarse los parámetros obtenidos son significativamente diferentes de cero. Además los parámetros de reversión a la media son semejantes en ambos procesos. Los estadísticos chi-cuadrado de ambos modelos junto con sus p -valores, no justifica que ninguno de los dos modelos deba ser rechazado.

	b	m	r_0	c^2	$g.l.$
Vasiceck	0,002681 (1,977066)	0.036826 (2,233588)	0.000372 (13,64066)	1,64952 [0,199024]	2
CIR	0,003115 (2,278224)	0,039794 (3,047557)	0,001550 (14,28237)	0,903061 [0,341963]	2

Tabla 2: Valores estimados de los parámetros de los procesos estocásticos por el método generalizado de momentos.

Para la valoración de obligaciones cupón-cero, es necesario estimar los parámetros que aparecen en el precio del riesgo de mercado de cada modelo. Estos parámetros se obtienen minimizando la raíz cuadrada del error cuadrático medio.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2},$$

donde N es el número de observaciones, P_i el precio observado y \hat{P}_i el precio estimado para la observación i . Los precios observados que utilizamos son los correspondientes a las obligaciones cupón-cero que obtuvimos mediante el tanto de rendimiento

$$P(t, T) = \exp(-(T - t)R(t, T)),$$

con vencimientos 1, 2, ..., 10 años, durante el periodo de tiempo del 2 de enero de 1996 al 30 de setiembre de 1997.

La Tabla 3 recoge los valores estimados de los parámetros que intervienen en los precios del riesgo de mercado en cada uno de los modelos. Los valores entre paréntesis son los estadísticos t .

	I_1	I_2	I_3	RMSE
Vasiceck	-5.771012 (-133,8081)	0	0	0,01405012
VasMod	1,914555 (4,021295)	-1,070493 (-16,37538)	-52,31381 (-12,121558)	0,01361773
CIR	-0,030304 (-138,7187)	0	0	0,01490867
CIRMod	-0,054942 (-0,068182)	-2,297155 (-26,35216)	0	0,0137285

Tabla 3: Valores estimados de los parámetros que intervienen en los precios del riesgo de mercado en cada uno de los modelos

4. Análisis de los modelos.

En esta sección comparamos los diferentes modelos. A tal efecto representamos gráficamente los errores cometidos en la valoración de las obligaciones cupón-cero, obtenidas con los distintos modelos, durante el periodo de predicción que comprende desde el 1 de octubre de 1997 hasta el 30 de abril de 1998.

La medida de error que hemos utilizado es la raíz cuadrada de la media de los errores al cuadrado, errores cometidos al sustituir los precios observados en el mercado, durante dicho periodo de tiempo, por los precios calculados con cada uno de los modelos para vencimientos de 1, 2, ..., 10 años.

En la Figura 3 presentamos los errores obtenidos para los distintos periodos de vencimiento. Observamos que los dos modelos que nosotros proponemos proporcionan mejores aproximaciones para vencimientos cortos, hasta 5 años. Para vencimientos largos, entre 5 y 9 años, los errores obtenidos para estos dos modelos son mayores. Sin embargo, a partir de ese vencimiento estos errores tienden a disminuir.

En la Figura 4 representamos los errores obtenidos mensualmente para los distintos vencimientos considerados. Esta gráfica muestra que a partir del quinto mes se obtienen mejores aproximaciones a los precios de las obligaciones con los modelos propuestos.

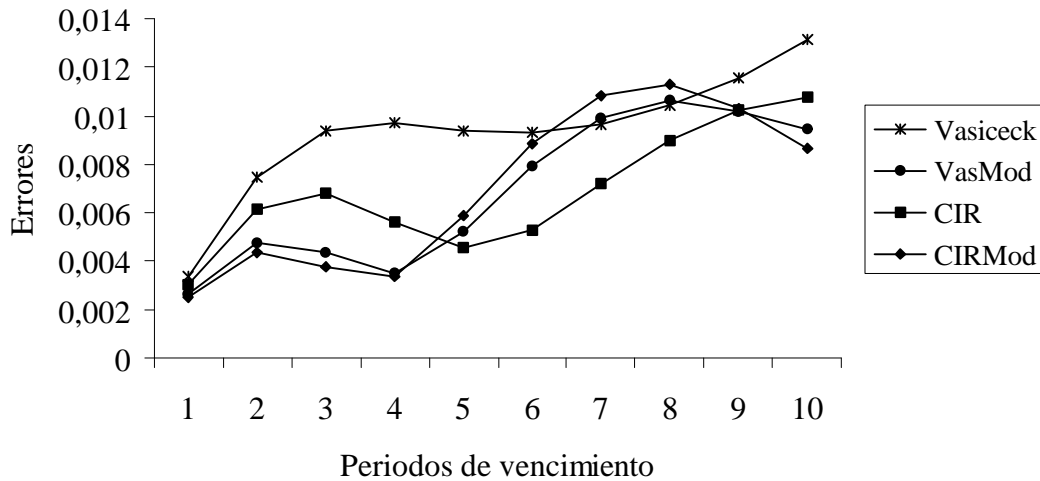


Figura 3: Errores obtenidos en la valoración de las obligaciones con cada uno de los modelos para cada periodo de vencimiento.

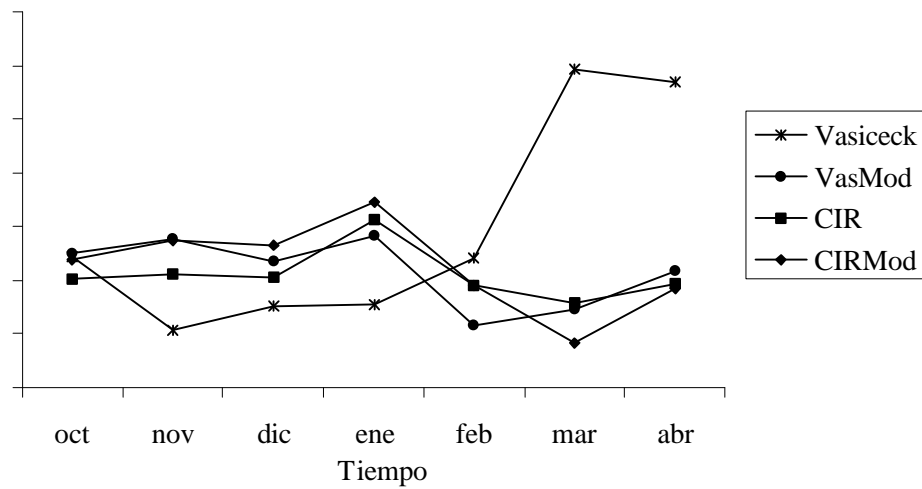


Figura 4: Evolución de los errores obtenidos en la valoración de las obligaciones con cada uno de los modelos.

5. Conclusiones

En este trabajo consideramos que el parámetro que representa el precio del riesgo de mercado puede variar a lo largo del tiempo, e incluso presentar una dependencia del tanto de interés.

Creemos que esta modificación puede proporcionar una mayor riqueza en el análisis y, además, nos permite obtener en muchos casos mejores aproximaciones en la valoración de las obligaciones. Este hecho queda reflejado en el estudio que mostramos en la Sección 4, al comparar los errores cometidos en dicha valoración con los distintos modelos descritos. Con la introducción del tiempo en el precio del riesgo de mercado, podemos prever con una mayor exactitud el precio de las obligaciones con vencimientos a corto y medio plazo.

Los modelos de un sólo factor han sido mejorados con la introducción de otras variables de estado. El análisis realizado en este trabajo puede extenderse a modelos de dos o más factores y creemos que con la introducción del tiempo en el precio del riesgo de mercado obtendríamos mejores resultados.

6. Bibliografía

- [1] Black, F. y M. Scholes. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, 81, 3, pp. 637-654.
- [2] Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1979). "A continuous time approach to the pricing of bonds". *Journal of Banking and Finance*, 3, pp. 133-155.
- [3] Brennan, M.J. y E.S. Schwartz. (1982). "An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, pp. 301-329.
- [4] Chan, J.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff y A.B. Sanders (1992). "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates". *Journal of Finance*, 47, 3, pp. 1209-1228.
- [5] Chen, L. (1996). *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*. Springer-Verlag Berlín Heidelberg.
- [6] Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985). "A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 2, pp. 385-408.
- [7] Friedman, A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications*. Vol 1. Academic Press, Inc. New York.
- [8] Greene, W. H. (1999) *Análisis Económico*. Prentice Hall Iberia, Madrid. Tercera edición.

- [9] Hansen, L.P. (1982). "Large sample properties of generalized method of moments estimators". *Econometrica*, 50, 4, pp. 1029-1054.
- [10] Hull, J. y A. White. (1990). "Pricing-interest-rate derivative securities". *Review of Financial Studies*, 3, 4, pp. 573-592.
- [11] Kloeden, P.E. y E. Platen. (1995) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag. New York
- [12] Merton, R. C. (1990). *Continuous-Time Finance*. Basil Blackwell Inc.
- [13] Nuñez, S. (1995) "Estimación de la estructura temporal de los tantos de interés en España: elección entre métodos alternativos". Documento de Trabajo 9522. Banco de España.
- [14] Rebonato, R. (1996). *Interest Rate Models Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options*. John and Wiley and Sons. England.
- [15] Schaefer, S.M. y E. S. Schwartz. (1984). "A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 4, pp. 413-424.
- [16] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 2, pp. 177-188.